

DOI: 10.7652/xjtuxb201311014

高频弯曲振动梁的随机参数能量有限元分析

张猛, 陈花玲, 祝丹晖, 张文博, 孔祥杰
(西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为了研究单个结构参数值遵循均匀分布规律随机变化时梁的高频振动响应统计特性,提出了随机参数能量有限元方法。该方法利用传统能量有限元方法,得到了确定梁结构能量密度响应的解析解,运用连续型随机变量的期望和方差公式,得到参数随机时系统任意位置处响应的均值和方差,并与能量密度模态解的蒙特卡罗仿真结果进行了比较。梁的截面宽度、高度及密度随机变化的响应统计特性的对比结果表明,响应方差对截面宽度的变化最敏感,对密度最不敏感,能量密度的方差随梁上位置坐标的增大呈先增大后减小的趋势,在激励点处取得最大值。为了保证系统响应值的稳定,在结构设计时尤其要注意保证截面高度的精度。

关键词: 能量有限元; 梁结构; 方差

中图分类号: TB123 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)11-0076-05

Stochastic Parameter Energy Finite Element Analysis for High-Frequency Flexural Vibration Beam

ZHANG Meng, CHEN Hualing, ZHU Danhui, ZHANG Wenbo, KONG Xiangjie
(School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To statistically analyze high-frequency vibration response when a parameter of beam structure is randomly and evenly distributed, a method called stochastic parameter energy finite element analysis (SPEFEA) is proposed. The energy density response of a deterministic beam is acquired by the traditional EFEA. Then adopting the expectation and variance formulas of continuous random variable, the mean and variance values at any position are acquired for uncertain parameter case. Monte Carlo simulations of analytical modal solution are conducted and compared with SPEFEA. The statistic features of energy density response, varying with beam section width, height and density, are investigated. It is found that the response variance gets most sensitive to the section height and least sensitive to the mass density. The energy density variance increases firstly then decreases with the increasing location coordinates, and reaches maximum at the exciting point. Special attention should be paid to the precision of section height in structure design to ensure the system stability.

Keywords: energy finite element analysis; beam; variance

统计能量方法(SEA)是常用的结构高频振动分析方统的平均响应,而无法预示系统中局部位置的精确析方法,但该方法只能从统计意义上预测整个子系响应。能量有限元方法(EFEA)来源于基于波动理

收稿日期: 2013-04-09。 作者简介: 张猛(1989—),男,硕士生;陈花玲(通信作者),女,教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172222)。

网络出版时间: 2013-09-06 网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20130906.1706.013.html>

论的能量流方法,视能量以波动形式在结构中传递,并借助有限元方法求解,使实际结构的几何特性和阻尼特征得到充分表述,从而克服了统计能量法的不足,因此是一种很有发展潜力的结构高频响应预示方法。

EFEA 的理论发展始于 1989 年,Nefske 等人建立了受单点简谐激励的简支梁结构的能量流控制方程^[1],并利用有限元方法进行了空间离散求解。1992 年,Wohlever 等人推导了杆和梁结构的能量密度微分控制方程^[2]。1992 年和 1995 年,Bouthier 分别推导了板和膜结构的能量密度控制方程^[3-5]。1993 年,Cho 提出了将能量有限元方法应用于包括板、膜、声场的耦合振动系统的思路^[6]。1996 年,Bitsie 对板-声耦合结构进行了 EFEA 分析^[7]。1998 年,Cho 利用 EFEA 对耦合梁结构进行了高频振动分析^[8]。2008 年,解妙霞推导了圆柱壳的能量密度控制方程^[9-10]。2009 年,Wang 在处理大阻尼强耦合复杂结构时,提出了零阶能量有限元方法^[11],这些现有的对 EFEA 的研究都是以确定性结构为研究对象展开的。

近年来,Langley 在 SEA 框架内,由高斯正交系综假设^[12-13]得到了结构参数值均匀分布时子系统平均能量的均值和方差^[14-16],并将 SEA 应用到结构参数具有不确定性的系统中。文献[17]对具有不确定性的中频系统的响应方差进行了研究,分别推导了刚性确定性组件和统计组件的部分响应方差表达式,并对结构参数值具有不确定性的子系统响应概率密度函数进行了研究^[18]。Ji 在 Langley 的 FE-SEA 混合方法的理论^[19]框架内,量化了 SEA 子系统的随机性对中频系统响应的影响^[20],但受 SEA 方法自身的限制,上述研究都是以子系统内的平均能量为研究对象,并不能精确到系统上任意位置点。

EFEA 是能反映结构几何特性和阻尼特征的高频响应预示方法,但关于结构参数具有不确定性的 EFEA 相关研究尚未见报道。本文以参数随机的梁结构为研究对象,根据参数确定的梁结构的能量密度解析解,提出了随机参数能量有限元方法(SPEFEA),并对结构参数值在给定范围内服从均匀分布的情况进行了分析和研究。

1 梁的名义能量密度

当单频简谐激励作用在梁上时,梁弯曲振动时的功率流与能量密度的关系式为^[1]

$$q = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \frac{de}{dx}, \quad c_g = 2(\omega^2 EI / \rho S)^{1/4} \quad (1)$$

式中: q 为梁弯曲振动时的功率流; η 为结构阻尼损耗因子; ω 为弯曲波的频率; c_g 为弯曲波的群速度; E 为杨氏模量; I 为梁横截面的惯性矩,对于矩形截面梁, $I=bh^3/12$,其中 b 为梁的横截面宽度, h 为梁的横截面高度; ρ 为梁的密度; S 为梁的横截面面积,对于矩形截面梁, $S=bh$; e 为空间时间的平均能量密度; x 为振动梁任意位置。

描述能量密度分布的能量密度方程为^[2]

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \frac{d^2 e(x)}{dx^2} + \eta\omega e(x) = \pi_{in} \delta(x-x_0) \quad (2)$$

$$\pi_{in} = \frac{1}{2} |F|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{Z} \right] \quad (3)$$

式中: π_{in} 为激励力产生的输入功率; $\delta(x-x_0)$ 为激励点的位置; F 为激励力的幅值; Z 为速度阻抗。式(2)的通解为

$$e(x) = Ae^{\varphi x} + Be^{-\varphi x}, \quad \varphi = \eta\omega/c_g \quad (4)$$

式中: A 、 B 为常数。式(2)的特解可由杜哈梅积分得到

$$e(x) = \frac{\pi_{in}}{2c_g} e^{-\varphi|x-x_0|} \quad (5)$$

式(2)的全解为

$$e(x) = Ae^{\varphi x} + Be^{-\varphi x} + \frac{\pi_{in}}{2c_g} e^{-\varphi|x-x_0|} \quad (6)$$

对于两端简支梁,由边界条件

$$q \Big|_{x=0} = q \Big|_{x=L} = 0 \quad (7)$$

可求得 A 、 B ,从而得到振动梁任意位置 x 处的名义能量密度的全解为

$$e(x) = \frac{\pi_{in}}{2c_g} \left[\frac{e^{-\varphi(L-x_0)} + e^{-\varphi(L+x_0)}}{e^{\varphi L} - e^{-\varphi L}} e^{\varphi x} + \frac{e^{-\varphi(L-x_0)} + e^{\varphi(L-x_0)}}{e^{\varphi L} - e^{-\varphi L}} e^{-\varphi x} + e^{-\varphi|x-x_0|} \right] \quad (8)$$

式中: L 为梁的长度。

2 随机参数梁的响应均值和方差

在工程实际应用中,由于制造公差的存在,以及在几何建模、边界条件处理、材料特性分析时,不可避免的一系列近似或理想化处理,使结构参数往往具有一定的不确定性,因此仅用理想化的名义参数值得到名义的响应值并不能完全反映响应信息。

2.1 随机参数梁的能量密度均值分析

对于系统某参数具有随机不确定特性时的系统响应,可以通过控制变量法来进行分析。一般地,对于梁结构内任一结构参数 θ 为不确定时, θ 在范围 Ω

域内服从概率分布 $p(\theta)$, 对应于 Ω 域内的集总平均能量密度均值为

$$e_m(x) = \int_{\Omega} p(\theta) e(x, \theta) d\Omega \quad (9)$$

以 b 为例, 假设 b 为不确定的, 则 b 的不确定性可以用随机变量 ζ 表示

$$b(\zeta) = \bar{b}(1 + \epsilon\zeta) \quad (10)$$

$$e_m(x) = E_{\zeta}[e(x, \zeta)] = \int_{\Omega} p(\zeta) e(x, \zeta) d\Omega \quad (11)$$

式中: $\bar{b}$ 为梁横截面的名义宽度; ζ 为随机变量, 取值范围为 $[-1, 1]$; ϵ 为规定的变化幅值; Ω 为 ζ 的积分域; $E[\cdot]$ 表示取集的总平均; $p(\zeta)$ 为概率密度分布函数。

2.2 随机参数梁的能量密度方差分析

方差的表达式^[21]为

$$\sigma^2(e) = E[e^2] - E^2[e] \quad (12)$$

一般地, 当 θ 不确定时, θ 在 Ω 内服从概率分布 $p(\theta)$, 则能量密度的响应方差为

$$\sigma_x^2 = \int_{\Omega} p(\theta) e^2(x, \theta) d\Omega - e_m^2(x) \quad (13)$$

假设 b 不确定时, 则

$$E_{\zeta}[e^2(x, \zeta)] = \int_{\Omega} p(\zeta) e^2(x, \zeta) d\Omega \quad (14)$$

将式(11)、式(14)带入式(12), 可得梁上任意位置处能量密度的响应方差

$$\sigma_s(x) = \sigma_x^2 = E_{\zeta}[e^2(x, \zeta)] - E_{\zeta}^2[e(x, \zeta)] \quad (15)$$

2.3 模态解的蒙特卡罗仿真方法

为了对本文推导的随机参数能量有限元方法进行验证, 给出了利用蒙特卡罗仿真(MCS)方法计算随机分布能量密度的方法。对于两端简支梁, 在 x_0 处施加单频简谐激励时, 利用模态叠加法, 得到结构的位移响应为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) Q_n(t)}{\omega_n^2(1 + j\eta) - \omega^2} \quad (16)$$

$$e = \frac{1}{4} \left[EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^* + \rho S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^* \right] \quad (17)$$

式中: $\varphi_n(x)$ 为梁上第 n 阶主阵型; $Q_n(t)$ 为广义力; ω_n 为第 n 阶模态的固有频率; $*$ 表示共轭。

将式(16)代入式(17)中, 即可得梁上能量密度的分布。考虑随机参数特性梁时, 可用 MCS 方法得到 m 组符合参数分布规律的参数值, 对每个参数值运用式(17)来计算梁上的能量密度响应, 对应得到 m 个能量密度值, 从而获得梁上任意位置处的能

量密度响应的均值和方差。 m 的取值越大, 最终得到的均值和方差越接近实际情况。

3 验证与分析

3.1 随机参数能量有限元方法的正确性验证

为了证明随机参数能量有限元方法的正确性, 以简支梁为研究对象, 将随机参数能量有限元方法的结果与基于 2 000 阶模态解的 MCS 分析结果进行了对比。

简支梁的各名义结构参数为: $\bar{L} = 4 \text{ m}$, $\bar{b} = 0.02 \text{ m}$, $\bar{h} = 0.02 \text{ m}$, $\bar{E} = 71 \text{ GPa}$, $\bar{\rho} = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\bar{\eta} = 0.05$ 。以梁的一端为坐标原点、梁的方向为 X 轴建立坐标系, 激励位置在梁的中点处, 激振频率 $f = 5 \text{ kHz}$ 。分别对 b, h, ρ, η 随机变化时的情况进行了研究和对比, 其中参考能量密度为 $1 \times 10^{-12} \text{ J/m}$ 。假设在给定范围内 b, h, ρ, η 等都服从均匀分布规律, 对于每个不确定的结构参数, ϵ 分别取 5%、10% 和 20%。

以 h 随机为例, ϵ 取 10%, 即 h 在 $[0.018, 0.022]$ 上均匀随机分布时, 随机参数能量有限元方法与模态解的 MCS 方法的均值对比结果如图 1 所示, 可见 2 种方法的均值结果吻合良好, 变化趋势也一致。

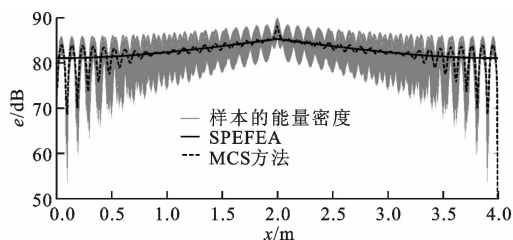


图 1 2 种方法的均值结果对比

同样, 为了证明本文方法处理能量密度响应方差的正确性, 以 b 随机为例, ϵ 取 10%, 即 b 在 $[0.018, 0.022]$ 上均匀随机分布时, SPEFEA 和 MCS 方法的方差对比结果如图 2 所示。可见, 随机参数能量有限元方法与 MCS 方法的方差结果吻合良好, 方差随梁上位置坐标的增大呈先增大后减小

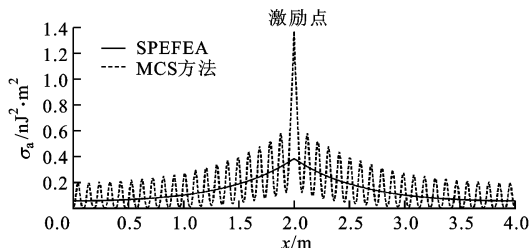


图 2 2 种方法的方差结果对比

的趋势,在激励点处取得最大值。

以 h 随机为例, ε 取 20%, 即 h 在 $[0.016, 0.024]$ 上均匀分布时, 名义能量密度与集总平均能量密度间的对比情况见图 3。可见, 两者能量密度的变化趋势一致, 在激励点处得到最大值, 两者的区别在于名义值整体略低于集总平均值, 说明当以 h 为中心均匀随机分布时, 利用名义值直接计算得到的能量密度会出现被低估的情况。

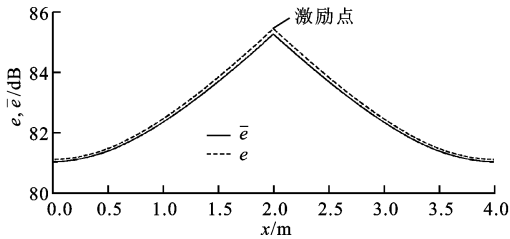
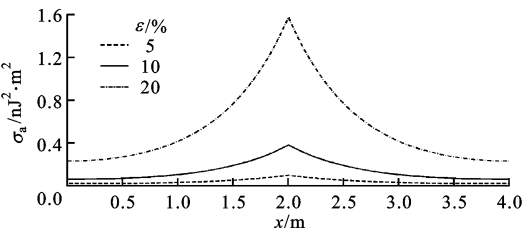


图 3 名义能量密度与集总平均能量密度的对比曲线

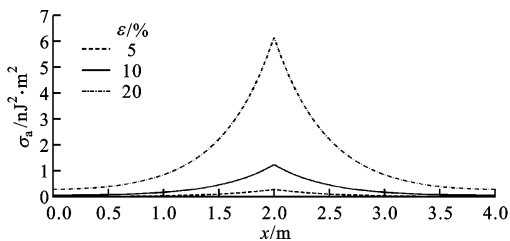
3.2 能量密度响应的参数敏感性分析

假设 b, h, ρ, η 服从均匀分布 ($\bar{b}, \bar{h}, \bar{\rho}, \bar{\eta}$ 的取值见 3.1 节), 当每个参数的 ε 分别取不同值时, 响应的波动情况见图 4。由图 4a、4c、4d 可见, 当 $\bar{b}, \bar{\rho}, \bar{\eta}$ 一定时, 能量密度响应的方差值与 ε 的平方近似成正比。 $\bar{h}$ 的取值一定时, 随着 ε 的变化, 能量密度响应的方差值呈现更高阶的非线性特征, 这与式 (8) 中 b, ρ, η 的等效幂级数基本相对应。

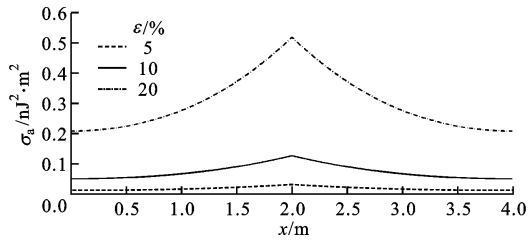
值得注意的是, 对于阻尼 η 随机的情况, 能量密度的方差随梁上坐标点位置的增大呈先减小后增大的趋势, 在激励点处得到最小值, 这反映出梁结构在受单点简谐激励时, 在激励点处对阻尼特性最不敏感。



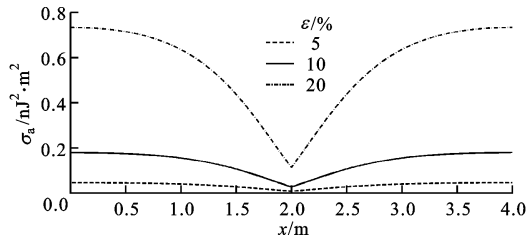
(a) $\bar{b}=0.02$ m



(b) $\bar{h}=0.02$ m



(c) $\bar{\rho}=2.7$ kg/m³



(d) $\bar{\eta}=0.05$

图 4 不同名义结构参数的 σ_a 随 x 的变化曲线

为了分析各结构参数对能量密度响应波动的影响程度, 本文对不同结构参数的 ε 均取 10% 时的方差进行了对比 (见图 5)。由图 5 可知, 当随机分布的结构参数是 h 时, 梁各位置处响应的方差最大, 结构参数为 ρ 时最小, 这表明梁结构能量密度的响应对 h 最为敏感。因此, 为了保证系统响应值的稳定性, 在设计结构参数时首先要保证 h 的精度。

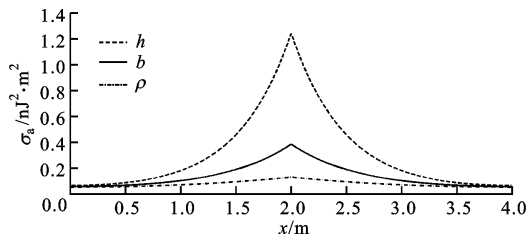


图 5 结构参数随机变化时 σ_a 随 x 的变化曲线

4 结 论

本文在传统 EFEA 的基础上提出了随机参数能量有限元方法, 以梁结构为研究对象, 对单参数随机情况下简支梁结构任意位置处能量密度响应的均值以及方差进行了求解, 并将结果与基于模态解的蒙特卡洛仿真结果进行了对比, 从而验证了本文方法的正确性。

本文分别对截面宽度、截面高度、密度、阻尼等主要结构参数随机变化时的能量密度方差进行了分析, 结果表明, 当截面宽度、截面高度、密度随机变化时, 能量密度的方差在激励点最大, 随着激励点的距离增大而减小; 当阻尼随机变化时, 变化趋势则与之

相反,在激励点处取得最小值。

将每个结构参数的随机变化幅值分别取5%、10%、20%进行对比分析,截面高度对能量密度方差的影响最大,而密度对能量密度方差的影响最小,即能量密度响应对梁截面的高度最敏感,对密度的敏感性最差。因此,在设计结构参数时,为了保证系统响应值的稳定性,应特别注意保证截面高度的精度。

参考文献:

- [1] NEFSKE D J, SUNG S H. Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams [J]. ASME Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design, 1989, 111(1): 94-100.
- [2] WOHLEVER J C, BERNHARD R J. Mechanical energy flow models of rods and beams [J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 153(1): 1-19.
- [3] BOUTHIER O M, BERNHARD R J. Models of space-averaged energetics of plates [J]. AIAA Journal, 1992, 30(3): 616-623.
- [4] BOUTHIER O M, BERNHARD R J. Simple models of the energetics of transversely vibrating plates [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 182(1): 149-166.
- [5] BOUTHIER O M, BERNHARD R J. Simple models of energy flow in vibrating membranes [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 182(1): 129-147.
- [6] CHO P E. Energy flow analysis of coupled structures [D]. Indiana, USA: Purdue University, 1993.
- [7] BITSIT F. The structural-acoustic energy finite-element [D]. Indiana, USA: Purdue University, 1996.
- [8] CHO P E, BERNHARD R J. Energy flow analysis of coupled beams [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 211(4): 593-605.
- [9] 解妙霞, 陈花玲, 吴九汇. 圆柱壳高频弯曲振动的能量有限元分析 [J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(9): 1113-1116.
XIE Miaoxia, CHEN Hualing, WU Jiuhui. Energy finite element analysis to high-frequency bending vibration in cylindrical shell [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42(9): 1113-1116.
- [10] 解妙霞. 能量有限元方法在飞行器仪器舱高频声振耦合问题中的应用研究 [D]. 西安: 西安交通大学,

2011.

- [11] WANG Shuo, BERNHARD R J. Prediction of averaged energy for moderately damped systems with strong coupling [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319(1): 426-444.
- [12] WEAVER R L. Spectral statistics in elastodynamics [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1989, 85(3): 1005-1013.
- [13] LOBKIS O I, WEAVER R L, ROZHKOV I. Power variances and decay curvature in a reverberant system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237(2): 281-302.
- [14] LANGLEY R S, COTONI V. Response variance prediction in the statistical energy analysis of built-up systems [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2004, 115(2): 706-718.
- [15] LANGLEY R S, BROWN A W M. The ensemble statistics of the energy of a random system subjected to harmonic excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 275(3): 823-846.
- [16] LANGLEY R S, BROWN A W M. The ensemble statistics of the band-averaged energy of a random system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 275(3): 847-857.
- [17] LANGLEY R S, COTONI V. Response variance prediction for uncertain vibro-acoustic systems using a hybrid deterministic-statistical method [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2007, 122(6): 3445-3463.
- [18] REYNDERS E, LANGLEY R S. Response probability distribution of built-up vibro-acoustic systems [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2011, 131(2): 1138-1149.
- [19] SHORTER P J, LANGLEY R S. Vibro-acoustic analysis of complex systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 288(3): 669-699.
- [20] JI Lin, HUANG Zhenyu. Analysis of subsystem randomness effects on the mid-frequency vibrations of built-up structures [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(13): 3190-3200.
- [21] 茆诗松, 周纪芾. 概率论与数理统计 [M]. 北京: 中国统计出版社, 2009: 89-123.

(编辑 管咏梅)